Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008 – IV РАЗРЕД

1. Три пријатеља, Милош, Урош и Јанош, поклонили су 12 502 књиге школи. Милош је поклонио 4 260 књига, а Урош 456 књига више од Милоша. Колико књига је поклонио Јанош?

2. На травнатом терену квадратног облика дужине 200 метара, направљен је базен димензија $30m$ и $15m$. Око базена је бетонска стаза ширине 1 метар. Колико ари травњака има око базена?

3. Дешифруј сабирање, ако истим словима одговарају исте, а различитим бројевима различите цифре.

$$\begin{array}{rr} & A \\ & BA \\ & CBA \\ + & DCBA \\ \hline & 2008 \end{array}$$

4. Површина правоугаоника је 2 $008cm^2$. Дужина једне странице је паран број центиметара, а друге непаран број центиметара. Израчунати обим правоугаоника. Наћи сва решења.

5. У згради са 4 спрата и 4 улаза (I, II, III и IV) је на сваком спрату по један стан у сваком улазу. У сваком од станова у непарним улазима живи по једнак број станара. У сваком од станова у парним улазима живи дупло више станара него у сваком од станова у непарним улазима. Ако у згради укупно живи 48 станара, колико станара живи у сваком стану?

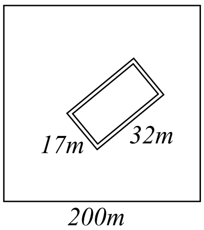
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

IV РАЗРЕД

1. Урош је поклонио $4\ 260 + 456 = 4\ 716$ књига (**10 бодова**), а Јанош је поклонио $12\ 502 - (4\ 716 + 4\ 260) = 3\ 526$ књига (**10 бодова**).

2. Површина терена је $P_1 = 200 \cdot 200 = 40\ 000 m^2$ (**4 бода**). Површина коју заузима базен са стазом је $P_2 = 32 \cdot 17 = 544 m^2$ (**6 бодова**). Травњака око базена има $P = P_1 - P_2 = 39\ 456 m^2$ (**6 бодова**), што је $394a\ 56m^2$ (**4 бода**).



3. $A = 7,\ B = 6,\ C = 4,\ D = 1$. Свака тачно одређена вредност доноси **5 бодова**.

4. Како је $2\ 008 = 1 \cdot 2\ 008 = 2 \cdot 1\ 004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$ (**8 бодова**) задатак има два решења. Ако су дужине страница $1cm$ и $2\ 008cm$, решење је $O = 2 \cdot (1 + 2\ 008) = 4\ 018cm$ (**6 бодова**), а ако су дужине страница $8cm$ и $251cm$ решење је $O = 2 \cdot (8 + 251) = 518cm$ (**6 бодова**).

5. На сваком спрату живи $48 : 4 = 12$ станара (**5 бодова**). Како је на једном спрату два стана у непарним и два стана у парним улазима, то 4 станара живи у становима у непарним улазима на једном спрату, а 8 станара у становима у парним улазима на једном спрату. Значи, у једном стану у непарним улазима живе два станара, а у једном стану у парним улазима живе четири станара (**15 бодова**).

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008.

V РАЗРЕД

1. Ако је $a = 2,5$ и $b = 10$, израчунај вредност израза
$$1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

2. Дате су две различите кружнице и три различите праве. За тачку кажемо да је "симпатична" ако је заједничка за два од датих пет геометријских објеката. Колико највише "симпатичних" тачака могу имати дате кружнице и праве?

3. Колико се бројева може написати помоћу елемената скупа M кога чине прости чиниоци броја 2 310, ако тражени бројеви садрже по 2 проста чиниоца?

4. Страница квадрата је $6cm$. Једном правом је подељен на 2 правоугаоника чији се обими разликују за $5cm$. Израчунај површине тих правоугаоника.

5. Златар Златко је за $\frac{1}{2}kg$ сребра и $\frac{1}{3}kg$ злата платио 750 000 динара, а за $1kg$ сребра и $\frac{1}{2}kg$ злата платио је 1 250 000 динара. Колико ће Златко платити $2kg$ сребра и $1kg$ злата?

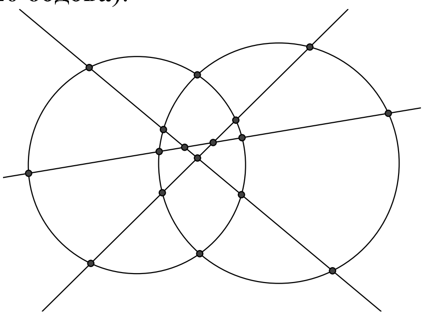
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

V РАЗРЕД

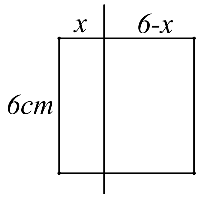
1. $1 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 1 : \frac{1}{2} = 2$ (**20 бодова**).

2. 17 тачака (**20 бодова**).



3. Како је $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ (**10 бодова**) то су тражени бројеви $6 = 2 \cdot 3,\ 10 = 2 \cdot 5,\ 14 = 2 \cdot 7,\ 22 = 2 \cdot 11,\ 15 = 3 \cdot 5,\ 21 = 3 \cdot 7,\ 33 = 3 \cdot 11,\ 35 = 5 \cdot 7,\ 55 = 5 \cdot 11$ и $77 = 7 \cdot 11$ (За сваки број по **1 бод**).

4. Како је $2 \cdot (6 - x) + = 2 \cdot x + 5$, то је $x = \frac{7}{4}$ (**10 бодова**). Мањи правоугаоник има површину $P_1 = \frac{7}{4} \cdot 6 = \frac{21}{2} cm^2$ (**5 бодова**), а већи правоугаоник $P_2 = \frac{17}{4} \cdot 6 = \frac{51}{2} cm^2$ (**5 бодова**).



5. Ако $\frac{1}{2}kg$ сребра и $\frac{1}{3}kg$ злата кошта 750000 динара, онда дупло већа количина, тј. $1kg$ сребра и $\frac{2}{3}kg$ злата кошта 1 500 000 динара (**3 бода**). Ако од овога одузмемо $1kg$ сребра и $\frac{1}{2}kg$ злата добијамо да $\frac{1}{6}kg$ злата кошта 250 000 динара (**6 бодова**), одакле $1kg$ злата кошта 1 500 000 динара (**2 бодова**). Сада једноставно добијамо да $1kg$ сребра кошта 500 000 динара (**5 бодова**). Дакле, $2kg$ сребра и $1kg$ злата коштају 2 500 000 динара (**4 бодова**).

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008.

VI РАЗРЕД

1. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, израчунај вредност израза
$$\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b} + 90a - 4,5b.$$

2. Одреди цифре a и b $(a \neq b)$ тако да број $0,\overline{abab\ldots}$ буде једнак нескративом разломку за који је збир имениоца и бројиоца једнак 17.

3. Конструиши троугао ABC ако је познато $a + c = 8cm$, $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

4. Одреди све просте бројеве $p,\ q$ и r такве да је
$$p \cdot (264q + 4r) = 2008.$$

5. Страница ромба $ABCD$ је $12cm$, а $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом. Праве AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN.

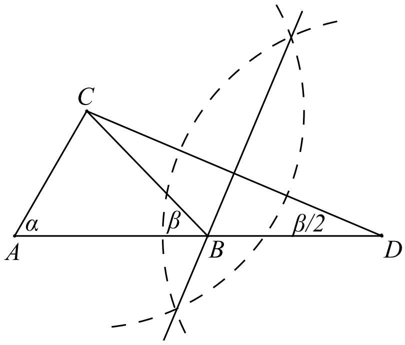
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

VI РАЗРЕД

1. Како је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, то је $a = \frac{b}{20}$ **(5 бодова)**. Полазни израз постоје $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + 2 \cdot \frac{a}{b} + 4,5b - 4,5b$ **(10 бодова)**, одакле је вредност полазног израза $\frac{1}{8}$ **(5 бодова)**.

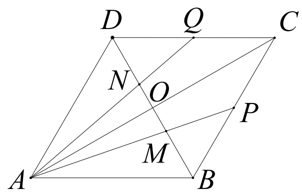
2. Ако је $x = 0,\overline{abab\ldots}$, тада је $100x = ab,\overline{abab\ldots}$ **(2 бода)**. Из ове две једнакости добијамо да је $99x = \overline{ab}$ **(2 бода)**, односно $x = \frac{\overline{ab}}{99} = \frac{10a+b}{9 \cdot 11}$ **(4 бода)**. Како је збир бројиоца и имениоца несводљивог разломка 17, то мора да $9 \mid 10a + b$ или $11 \mid 10a + b$ **(2 бода)**. Ако $11 \mid 10a + b$ то је $10a + b = 11 \cdot (17 - 9) = 88$, одакле је $a = b = 8$. Међутим, како је $a \neq b$, ово не може бити решење **(5 бодова)**. Ако $9 \mid 10a + b$, то је $10a + b = 9 \cdot (17 - 11) = 54$, одакле је $a = 5$ и $b = 4$ **(5 бодова)**.



3. Нека је дат троугао ABC. Продужимо страницу AB преко темена B за дужину a и добијамо тачку D ($|AD| = a+c$). Троугао CBD је једнакокраки **(4 бода)** и угао β је његов спољашњи угао, па је $\measuredangle BDC = \frac{\beta}{2}$ **(4 бода)**. Такође, теме B, врх тог троугла, налази се на симетрали странице CD **(2 бода)**. Дакле, прво конструишемо троугао ADC чија је страница $a + c$ и углови α и $\frac{\beta}{2}$, чиме добијамо темена A и C **(5 бодова)**, а у пресеку симетрале дужи CD и AD добијамо и теме B **(5 бодова)**.

4. $4p \cdot (66q + r) = 2008$; $p \cdot (66q + r) = 502 = 2 \cdot 251$ **(4 бода)**; Како је $66q + r > 2$, то је $p = 2$ и $66q + r = 251$ **(4 бода)**. Из $66q < 251$, имамо $q < 4$ (**4 бода**). За $q = 2$ је $r = 119 = 7 \cdot 17$ па ово не може бити решење (**4 бода**), а за $q = 3$ је $r = 53$ што је и решење задатка (**4 бода**).

5.



Троугао ABD је једнакостраничан ($\measuredangle BAD = 60^\circ$ и $BA = AD$) па је $BD = 12cm$ (**3 бода**). Означимо пресечну тачку дијагонала са O. Тада је $BO = 6cm$. Тачка M је тежиште троугла ABC (**5 бодова**) (пресек тежишних дужи AP и BO). Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2 : 1$, то је $OM = \dfrac{1}{3}BO = 2cm$ (**5 бодова**). Аналогно, N је тежиште троугла ACD, и $NO = 2cm$ (**2 бода**). Дакле, $MN = MO + NO = 4cm$ (**5 бодова**).

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза
$$\sqrt{\left(\sqrt{2\,008}-45\right)^2}+\sqrt{\left(44-\sqrt{2\,008}\right)^2}.$$

2. У правоуглом троуглу је $t_a = 2\sqrt{13}cm$ и $t_b = \sqrt{73}cm$. Израчунај хипотенузу тог правоуглог троугла.

3. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, чија је страница $a = 8cm$. Израчунај површину троугла $A_1A_2A_5$.

4. Да ли је израз
$$1\,004^2 - 1\,003^2 + 1\,002^2 - 1\,001^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$
дељив са 2 008?

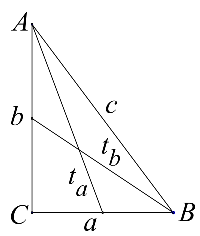
5. Природан број зовемо "симпатичним" ако је производ његових цифара паран. Колико има "симпатичних" шестоцифрених бројева?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

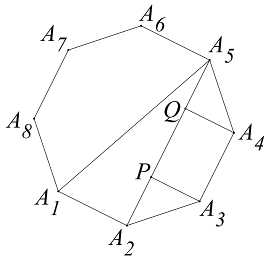
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
VII РАЗРЕД

1. Важи $44 < \sqrt{2\,008} < 45$ (**5 бодова**), па је
$\sqrt{\left(\sqrt{2\,008}-45\right)^2} = \left|\sqrt{2\,008}-45\right| = 45-\sqrt{2\,008}$ (**5 бодова**) и
$\sqrt{\left(44-\sqrt{2\,008}\right)^2} = \left|44-\sqrt{2\,008}\right| = \sqrt{2\,008}-44$ (**5 бодова**).
Сада је $\sqrt{\left(\sqrt{2\,008}-45\right)^2}+\sqrt{\left(44-\sqrt{2\,008}\right)^2} = 1$ (**5 бодова**).

2. Како је $b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = t_a^2 = 52$ (**3 бода**) и $\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2 = t_a^2 = 73$ (**3 бода**), то је $\left(b^2+\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{b^2}{4}+a^2\right) = 125$, одакле је $\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right) = 125$ (**4 бода**), тј. $\frac{5}{4}c^2 = 125$ (**4 бода**). Дакле $c = 10cm$ (**4 бода**).



Слика уз задатак **2**



Слика уз задатак **3**

3. Четвороугао $A_2A_3A_4A_5$ је једнакокраки трапез (**2 бода**). Нека су P и Q подножја нормала из тачака A_3 и A_4, редом, на A_2A_5. Како је A_3A_4QP правоугаоник, то је $PQ = 8cm$ (**4 бода**). Како је $\measuredangle A_3A_4A_5 = 135°$, то је $\measuredangle QA_4A_5 = 45°$ (**2 бода**), па је троугао QA_4A_5 једнакокрако-правоугли и његова хипотенуза је $8cm$. Одатле добијамо да је $QA_5 = 4\sqrt{2}cm$ (**4 бода**). Сада је $A_2A_5 = 8\cdot(1+\sqrt{2})cm$ (**4 бода**), па је тражена површина $32\cdot(1+\sqrt{2})cm^2$ (**4 бода**).

4. У датом изразу има 502 разлике квадрата (**2 бода**)
$\left(1\,004^2-1\,003^2\right)+\left(1\,002^2-1\,001^2\right)+\ldots+\left(4^2-3^2\right)+\left(2^2-1^2\right)$.
Када раставимо сваку од ових разлика квадрата на чиниоце, један

чинилац ће бити 1, па добијамо следећи збир од 502 сабирка (**6 бодова**)

$$2\,007 + 2\,003 + \ldots + 7 + 3.$$

Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., имамо да је тражени збир $251 \cdot 2\,010$ (**8 бодова**). Како $8 \mid 2\,008$, а $8 \nmid 2\,010$, закључујемо да дати израз није дељив са $2\,008$ (**4 бода**).

5. Број је "симпатичан" ако је барем једна његова цифра парна (**3 бода**). Шестоцифрени бројеви који нису "симпатични" у свом запису имају само непарне цифре, а њих је укупно $5^6 = 15\,625$ (**7 бодова**). Како шестоцифрених бројева има $900\,000$ (**7 бодова**), то "симпатичних" има $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$ (**3 бода**).

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
19.04.2008 – VIII РАЗРЕД

1. Одреди решења једначине $|x - |x - |x||| = 2\,008$.

2. Теме A троугла ABC је нула линеарне функције $y = \frac{3}{4}x + 12$, а теме B је нула линеарне функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Теме C је заједничка тачка графика тих линеарних функција.

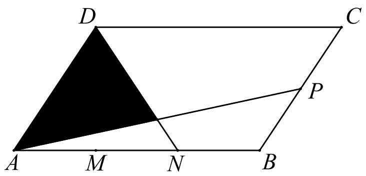
а) Докажи да је троугао ABC правоугли.

б) Израчунај обим и површину троугла ABC.

3. Од папира облика квадрата површине $50cm^2$ изрезана је мрежа правилне четворостране пирамиде тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде (темена квадрата су врхови троугла мреже те пирамиде). За ту пирамиду се зна да је ивица основе два пута мања од висине бочне стране. Колико процената површине квадрата чини површина мреже?

4. Велика коцка је састављена од малих коцки једнаких ивица, али које су обојене црвеном, плавом или белом бојом. Од укупног броја, $\frac{13}{72}$ коцки је црвене боје, а $\frac{25}{48}$ је беле боје. Број плавих коцки је мањи од 1 000. Колико има плавих коцки, а колико укупно малих коцки?

5. Тачке M и N деле страницу AB паралелограма $ABCD$ на три једнака дела. Тачка P је средиште странице BC. Који део површине паралелограма чини осенчени део?



Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – VIII РАЗРЕД

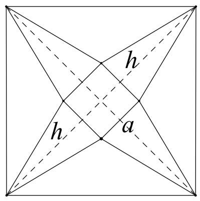
1. За $x \geqslant 0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x-x||=|x|=x$, па је $x=2\,008$ једно решење (**10 бодова**).

За $x<0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x+x||=|x+2x|=-3x$, па је $x=-\dfrac{2\,008}{3}$ још једно решење једначине (**10 бодова**).

2. а) Како је $\dfrac{3}{4}x+12=0$ за $x=-16$ (**2 бода**) то су координате тачке $A(-16,0)$ (**1 бод**). Слично, за $-\dfrac{4}{3}x+12=0$ добијамо $x=9$ (**2 бода**), па су координате тачке $B(9,0)$ (**1 бод**). Из $\dfrac{3}{4}x+12=-\dfrac{4}{3}x+12$ добијамо $x=0$ (**2 бода**), па је $C(0,12)$ (**1 бод**). Дужине страница овог троугла су $a=15$, $b=20$ и $c=25$ (**3 бода**), а како је $c^2=a^2+b^2$ то је троугао ABC правоугли (**4 бода**).

б) $O_{ABC}=60$ (**2 бода**), $P_{ABC}=300$ (**2 бода**).

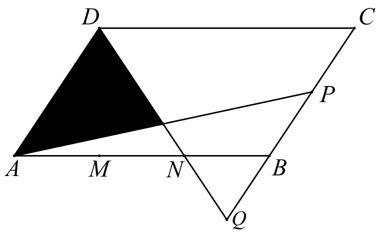
3. За добро нацртану слику **4 бода**. Страница квадрата је $5\sqrt{2}cm$ (**2 бода**), а његова дијагонала $10cm$(**2 бода**). Сада је $10=a+2h$ и како је $h=2a$, добијамо да је $a=2cm$ и $h=4cm$ (**6 бодова**). Површина пирамиде је $P=2^2+4\cdot\dfrac{4\cdot 2}{2}=20cm^2$ (**3 бода**) што је 40% од површине квадрата (**3 бода**).



4. Укупан број коцки је n^3 $(n\in\mathbb{N})$, па како је $\dfrac{13}{72}$ црвених и $\dfrac{25}{48}$ белих то n^3 мора бити дељиво са 72 и 48 (**4 бода**). Како је $72=3^2\cdot 2^3$ и $48=3\cdot 2^4$ то је $n^3=3^3\cdot 2^6\cdot k^3$ (**4 бода**). Како је $\dfrac{13}{72}=\dfrac{312\cdot k^3}{12^3k^3}$ (**2 бода**) од укупног броја црвених, а $\dfrac{25}{48}=\dfrac{900\cdot k^3}{12^3k^3}$ (**2 бода**) белих, то је плавих $\dfrac{516\cdot k^3}{12^3k^3}$ (**2 бода**). Међутим, плавих је мање од 1 000 па је $k=1$ (**2 бода**). Број плавих коцки је 516 (**2 бода**), а укупно их је $12^3=1\,728$ (**2 бода**).

Напомена: Ако је нађен одговарајући број плавих коцки и укупан број коцки, а није показано да је $k=1$, дати 18 бодова.

5.



Продужавајући BC и DN тако да се одговарајуће праве секу у тачки Q, непосредно се види да је $\triangle\ AND \sim \triangle\ BNQ$ (**5 бодова**) па је сада $BQ = \frac{1}{2}AD$ (**5 бодова**). Како је $PQ = AD$ то је $AQPD$ паралелограм чију једну четвртину чини осенчени део (**5 бодова**). Како је $P_{ABCD} = P_{AQPD}$ (једнаке су им страница и одговарајућа висина) то осенчени део чини $\frac{1}{4}$ површине паралелограма $ABCD$ (**5 бодова**).